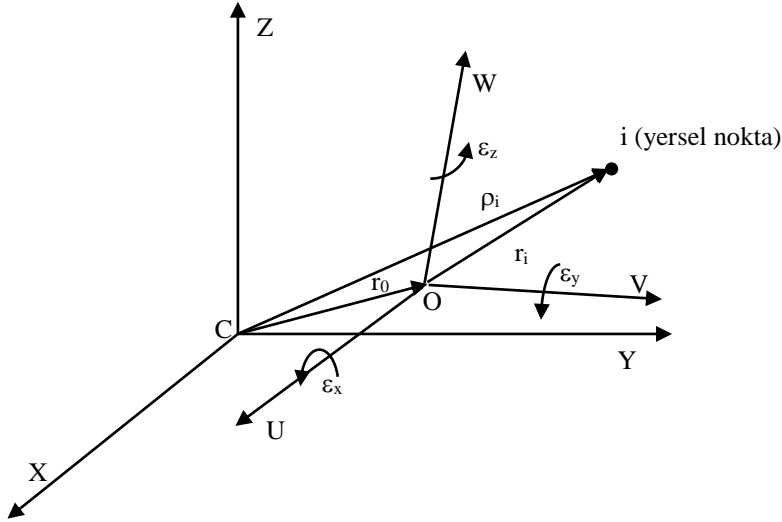


3 BOYUTLU BENZERLİK DÖNÜŞÜMÜ

- **Bursa-Wolf Modeli**

Bursa-Wolf modeli, iki koordinat sistemi arasındaki ilişkiyi benzerlik dönüşümü ile tanımlar. Bu ilişkinin tanımlanması için üç öteleme $[X_0, Y_0, Z_0]$, üç dönüklük $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$ ve bir ölçek faktörü (k) parametreleri gereklidir.



Şekil 12. Bursa-Wolf modeli

İki sistem arasındaki dönüşüm eşitliğinin fonksiyonel modeli şu şekilde yazılır.

$$(\underline{p}_i) = (\underline{r}_0) + (1+k) R (\underline{r}_i)$$

Burada $(\underline{p}_i) = [X_i, Y_i, Z_i]$, $(\underline{r}_i) = [U_i, V_i, W_i]$ dik koordinat sistemlerini, $R = R_1(\epsilon_x) \cdot R_2(\epsilon_y) \cdot R_3(\epsilon_z)$ dönüklük matrisini ve $(\underline{r}_0) = [X_0, Y_0, Z_0]$ öteleme parametrelerini göstermektedir. $R_1(\epsilon_x)$, $R_2(\epsilon_y)$, $R_3(\epsilon_z)$ dönüklük matrisleri,

$$R_1(\varepsilon_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon_x & \sin \varepsilon_x \\ 0 & -\sin \varepsilon_x & \cos \varepsilon_x \end{bmatrix}$$

$$R_2(\varepsilon_y) = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y & 0 & -\sin \varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varepsilon_y & 0 & \cos \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

$$R_3(\varepsilon_z) = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_z & \sin \varepsilon_z & 0 \\ -\sin \varepsilon_z & \cos \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılırsa çarpımları sonucu oluşan R dönüklük matrisi,

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y \cos \varepsilon_z & \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_y \sin \varepsilon_z + \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_y & \sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_y \sin \varepsilon_z - \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \\ -\sin \varepsilon_z & \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_z & \sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_z \\ \sin \varepsilon_y \cos \varepsilon_z & \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \sin \varepsilon_z - \sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_y & \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \sin \varepsilon_z + \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Jeodezik çalışmalarda kullanılan koordinat sistemleri yaklaşık olarak paralel olan sistemler oldukları için dönüklük açıları çok küçük açılardır. Bu nedenle $\cos \varepsilon = 1$, $\sin \varepsilon = \varepsilon$ ve kabulleri yapılırsa;

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + (1+k) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Doğrusal olmayan eşitlik doğrusallaştırılırsa matris gösterimi ile şu şekle gelir.

$$V = \underline{A} \underline{X} - \ell$$

ve fonksiyonel modelin çözümü En Küçük kareler yöntemine göre yapılır.

ÜÇ BOYUTLU KOORDİNAT SİSTEMLERİ ARASINDAKİ DÖNÜŞÜMLER

1. İki Koordinat sistemi arasında sadece dönüklük varsa;

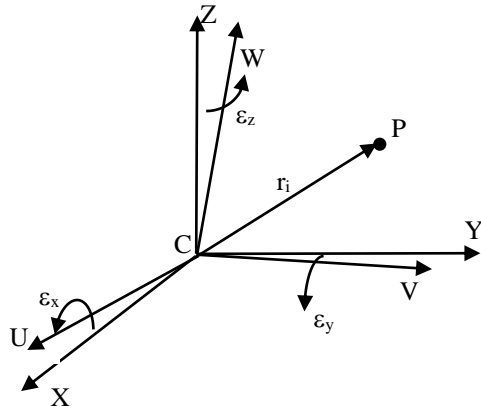
$$R_1(\epsilon_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon_x & \sin \epsilon_x \\ 0 & -\sin \epsilon_x & \cos \epsilon_x \end{bmatrix} \quad R_2(\epsilon_y) = \begin{bmatrix} \cos \epsilon_y & 0 & -\sin \epsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \epsilon_y & 0 & \cos \epsilon_y \end{bmatrix} \quad R_3(\epsilon_z) = \begin{bmatrix} \cos \epsilon_z & \sin \epsilon_z & 0 \\ -\sin \epsilon_z & \cos \epsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılırsa çarpımları sonucu oluşan R dönüklük matrisi,

$$R = \begin{bmatrix} \cos \epsilon_y \cos \epsilon_z & \cos \epsilon_x \cos \epsilon_y \sin \epsilon_z + \sin \epsilon_x \sin \epsilon_y & \sin \epsilon_x \cos \epsilon_y \sin \epsilon_z - \cos \epsilon_x \sin \epsilon_y \\ -\sin \epsilon_z & \cos \epsilon_x \cos \epsilon_z & \sin \epsilon_x \cos \epsilon_z \\ \sin \epsilon_y \cos \epsilon_z & \cos \epsilon_x \sin \epsilon_y \sin \epsilon_z - \sin \epsilon_x \cos \epsilon_y & \sin \epsilon_x \sin \epsilon_y \sin \epsilon_z + \cos \epsilon_x \cos \epsilon_y \end{bmatrix}$$

$\cos \epsilon = 1$, $\sin \epsilon = \epsilon$ kabulleri yapılırsa

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 1 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix}$$



2. İki Koordinat sistemi arasında sadece dönüklük ve ölçek katsayısı varsa;

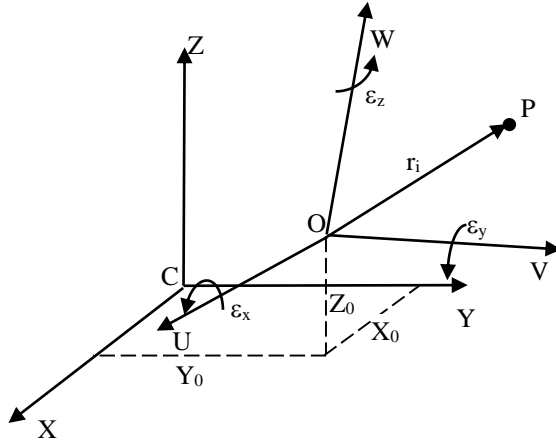
$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = (1+k) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix}$$

3. İki Koordinat sistemi arasında sadece dönüklük, ölçek katsayısı ve öteleme varsa;

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = (1+k) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}$$

eşitlikleri elde edilir.



Bu eşitliklerden En Küçük Kareler Yöntemine göre çözüm,

$$\underline{V} = \underline{A}\underline{X} - \underline{\ell} \quad \underline{P} \quad \text{Matematik Model}$$

$$\underline{A}^T \underline{P} \underline{A} \underline{X} - \underline{A}^T \underline{P} \underline{\ell} = 0$$

$$\underline{X} = (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{P} \underline{\ell}$$

eşitlikleri yardımıyla yapılır.